Klasse ST12a **MND1 erster Test** 23. Oktober 2013

Name:

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Quadraturformel

$$(1) \qquad Q = \sum_{k=0}^{n} w_k \, f(\xi_k) \qquad \text{mit} \quad \xi_k = -1 + 2 \cdot \frac{k+1}{n+2}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

im Intervall $[-1, 1]$.

a) Betrachten Sie (1) für $n = 2$ und bestimmen Sie die Gewichte w_k in (1) so, dass alle Polynome bis und mit Grad 2 exakt integriert werden.

b) Benützen Sie (1) mit $n = 2$ aus a), um das Integral

$$I = \int_a^b f(x) \, dx,$$

numerisch zu integrieren. Dabei sind $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$ und $f(x) = \cos(x)$.
Welchen absoluten bzw. relativen Fehler machen Sie dabei?

Aufgabe 2

Gegeben ist das Integral

$$(2) \qquad I = \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx = \ln(2) = 0.693147$$

(2) soll mit der Trapezmethode numerisch bestimmt werden.

a) In der Theorie wurde das Standardintervall $[0, h]$ mit $\xi_0 = 0$ und $\xi_1 = h$ und den Gewichten $w_0 = w_1 = \frac{h}{2}$ verwendet.
Wenden Sie diese Quadratur auf (2) an.

b) Wieder für das Standardintervall $[0, h]$ werden jetzt neu die Stützstellen $\xi_0 = \frac{h}{4}$ und $\xi_1 = \frac{3h}{4}$ betrachtet. Bestimmen Sie für die neuen Stützstellen die neuen Gewichte w_0 und w_1 und wenden Sie diese neue Quadratur auf (2) an.

c) Vergleichen Sie die beiden Werte aus a) und b) mit dem exakten Wert. Welcher der beiden Werte ist besser?

Aufgabe 3

Gesucht ist für $b > 0$ das bestimmte Integral

$$F(b) = \int_0^b f(t) \, dt \qquad \text{wobei} \qquad f(t) = 2 + \frac{t^2}{3}$$

a) Bestimmen Sie U_n sowie O_n für eine äquidistante Zerlegung von $[0, b]$.
(algebraisch so einfach wie möglich)

b) Wie gross muss n sein, damit $O_n - U_n < \frac{b^2}{300}$ erfüllt ist?

c) $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = ?$

Lösung 1

a) $n = 2$, d.h. $\xi_k = -1 + 2 \cdot \frac{k+1}{4}$, $k = 0, 1, 2$ und damit $\xi_0 = -\frac{1}{2}$, $\xi_1 = 0$ und $\xi_2 = \frac{1}{2}$

zu lösendes Gleichungssystem:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} w_0 & + & w_1 & + & w_2 & = & 2 \\ -w_0 & & & + & w_2 & = & 0 \\ w_0 & & & + & w_2 & = & \frac{8}{3} \end{array} \right.$$

Lösung von (3): $w_0 = w_2 = \frac{4}{3}$ und $w_1 = -\frac{2}{3}$, mit dem Gauss-Algorithmus.

b) $[-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, wobei $x = x(\xi) = m\xi + q$. Hier $x = \frac{\pi}{2} \cdot \xi$, $-1 \leq \xi \leq 1$.

$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \xi\right) d\xi \approx Q = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left\{4 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2 \cdot \cos(0) + 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\} =$
$\frac{\pi}{3} \cdot \left(2\sqrt{2} - 1\right)$.

Fehler: absoluter Fehler $\Delta I = |Q - I| = \left|\frac{\pi}{3} \cdot \left(2\sqrt{2} - 1\right) - 2\right|$ und

relativer Fehler $\delta I = \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta I}{2}$.

Lösung 2

$[0, h] \longrightarrow [1, 2]$ mit $x = x(\xi) = \frac{1}{h} \cdot \xi + 1$, $0 \leq \xi \leq h$
und damit

$$(4) \qquad I = \int\limits_1^2 f(x)\, dx = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_0^h f\left(\frac{1}{h} \cdot \xi + 1\right) d\xi$$

a) Mit (4) erhalten wir

$$I \approx Q_1 = \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{2} \left(f(1) + f(2)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

b) Bestimmung der Gewichte:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} w_0 & + & w_1 & = & h \\ w_0 \cdot \frac{h}{4} & + & w_1 \cdot \frac{3h}{4} & = & \frac{h^2}{2} \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad w_0 = w_1 = \frac{h}{2}$$

Mit (4) erhalten wir jetzt

$$I \approx Q_2 = \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{2} \left(f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{7}\right) = \frac{24}{35}$$

c) $Q_1 = 0.75$, keine Dezimale richtig

$Q_2 = 0.685714$ bereits die erste Dezimale ist richtig, d.h. mit Q_2 erhalten wir eine bessere Approximation

$$|I - Q_2| < |I - Q_1|$$

Q_2 ist die Mittelpunktregel für zwei Halbierungen

Lösung 3

f ist auf dem betrachteten Intervall $[0, b]$ monoton wachsend.

a) $\Delta t = \frac{b}{n}$, $t_k = k \cdot \Delta t$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $f(t_k) = 2 + \frac{b^2}{3n^2} \cdot k^2$
und damit

$$O_n = \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(2 + \frac{b^2}{3n^2} \cdot k^2\right) = \frac{b}{n} \cdot \left(2n + \frac{b^2}{3n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \frac{b}{n} \cdot \left(2n + \frac{b^2}{3n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

also
$O_n = 2b + \frac{b^3}{18} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$ bzw. $U_n = 2b + \frac{b^3}{18} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$ analog (Summation von $k = 0$ bis $k = n - 1$).

b) $n > 100 \cdot b$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} O_n = F(b) = 2b + \frac{b^3}{9}$