Klasse ST12a **MND1 zweiter Test** 04. Dezember 2013

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist

$$F(x) = 2 \cdot 2^{-x} \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie den Fixpunkt von (1). Ist der Fixpunkt attraktiv oder abstossend?
(*mit* Begründung), graphische Darstellung, Einheiten auf beiden Achsen $1 \hat{=} 2$ Häuschen.

b) Der Fixpunkt in a) soll mit dem Δ^2- Verfahren von Aitken bestimmt werden. Starten Sie mit $x_0 = 2$ und bestimmen Sie den ersten beschleunigten Wert x_0'.

c) Dem Studenten XY ist das zu langsam, er will den gesuchten Wert mit dem Verfahren von Newton bestimmen. $f(x) = ?$ Ist die Konvergenzbedingung für $x_0 = 2$ erfüllt?

Aufgabe 2

a) Die Gleichung

$$\sin(x) = \frac{x}{3} - 0.5$$

hat im Intervall $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ eine Lösung.

Mit der Bisektion soll diese Lösung bestimmt werden. Dazu wird $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ als Startintervall gewählt.

- Ist diese Wahl korrekt?
- Wieviele Wiederholungen braucht es, damit im Resultat 4 korrekte Dezimalen nach dem Komma stehen, wie gross muss dabei ε sein?

b) Gegeben ist die Gleichung

$$f(x) = x^2 + 3x - 10 = 0\,.$$

Die eine der beiden Nullstellen soll mit gewöhnlicher Iteration bestimmt werden.

- Wie muss gerechnet werden?
- Wie gross ist der entsprechende Konvergenzquotient q?
- Wie schnell ist diese Iteration im Vergleich zur Bisektion?

Aufgabe 3

Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 + x - 2 = 0\,. \tag{2}$$

Die Nullstellen von (2) sollen mit der Iteration

$$x_{k+1} = 2 - x_k^2 \tag{3}$$

und dem Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ bestimmt werden.

a) Erhalten Sie mit (3) eine der beiden Nullstellen von (2)?
(*mit* Begründung) graphische Darstellung, Einheiten auf beiden Achsen $1 \hat{=} 2$ Häuschen.

Falls Sie a) mit einem Nein beantworten, werden folgende Auswege betrachtet:

bi) Beschleunigung von (3) mit Steffensen: bestimmen Sie mit dem Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ den Wert $x_0^{(1)}$ und bestimmen Sie damit

$$q_{\text{Steffensen}} \approx \left| \frac{x_0^{(1)} - s}{x_0 - s} \right|.$$

.

bii) Methode von Newton für (2): bestimmen Sie mit dem Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ die Werte x_1 und x_2.

Welcher der beiden Werte $x_0^{(1)}$ und x_2 ist qualitativ besser?

ST12a MND1 Lösungen zweiter Test 03.12.13

Lösung 1

a) Fixpunkt $s = 1$, mit $F'(x) = 2 \cdot (-\ln(2)) \cdot 2^{-x}$ und $|F'(1)| = \ln(2) < 1$, d.h. $s = 1$ ist attraktiv.

b) $x_0 = 2$, $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = \sqrt{2}$. Da s attraktiv, konvergiert das Verfahren von Aitken

$$x_0' = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = 2 - \frac{9}{4}(\sqrt{2} - 1) \approx 1.068$$

c) Newton: $f(x) = 2 \cdot 2^{-x} - x \stackrel{!}{=} 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad k = 0, 1, \ldots \qquad L(x) = \left| \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} \right|$$

wobei

$$f'(x) = 2(-\ln(2)) \cdot 2^{-x} - 1 \qquad f''(x) = 2(\ln(2))^2 \cdot 2^{-x}$$

Konvergenzbedingung für den Startwert:

$$L(x_0) = \left| \frac{f(x_0) f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} \right| = \left| \frac{(\frac{1}{2} - 2) 2(\ln(2))^2 \frac{1}{4}}{(2(-\ln(2))\frac{1}{4} - 1)^2} \right| = \frac{3}{4}(\ln(2))^2 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\ln(2)\right)^2} < 1$$

da der Nenner im letzten Term grösser als Eins ist. D.h. die Konvergenzbedingung ist erfüllt.

Lösung 2

a) $f(x) = \sin(x) - \frac{x}{3} + 0.5 \stackrel{!}{=} 0$

- $f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{6} + 0.5 > 0$ und $f(\pi) = \sin(\pi) - \frac{\pi}{3} + 0.5 < 0$, d.h. die Wahl ist korrekt.
- $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$: $n > \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(\pi \cdot 10^4)$

b) Fixpunktiteration $x = F(x)$, wobei der Fixpunkt s attraktiv sein muss, d.h $q = |F'(s)| < 1$.
Da $x^2 + 3x - 10 = (x - 2) \cdot (x + 5)$ kommen grundsätzlich zwei Fixpunkte in Frage, nämlich $s = 2$ odre $s = -5$.

- $x = \sqrt{10 - 3x}$, $F'(x) = \frac{(-3)}{2\sqrt{10-3x}}$, $s = 2$
- $q = \frac{3}{4}$
- Die Iteration ist langsamer, da $q > \frac{1}{2}$

($x = \frac{1}{3}(10 - x^2)$, $F'(x) = -\frac{2}{3}x$ ist für beide Fixpunkte betragsmässig grösser als eins)

Lösung 3

Die NS von (2) sind $s_1 = 1$, $s_2 = -2$.

a) Grafik. $F(x) = 2 - x^2$, $F'(x) = -2x \Longrightarrow |F'(s_1)| = 2 > 1$ und $F'(s_2) = 4 > 1$,
d.h. beide Fixpunkte sind abstossend.

bi) $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{7}{4}$ und $x_2 = -\frac{17}{16}$ und damit

$$x_0^{(1)} = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = \frac{1}{2} + \frac{5}{13} = \frac{23}{26},$$

d.h. Konvergenz gegen $s_1 = 1$, also

$$q_{\text{Steffensen}} \approx \left| \frac{\frac{23}{26} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right| = \frac{3}{13}.$$

bii) Newton:

$$x_{k+1} = x_x - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 + x_k - 2}{2x_k + 1} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{9}{8}$ und $x_2 = \frac{209}{208}$, d.h. auch hier konvergiert die Folge gegen $s_1 = 1$.

Vergleich der beiden Werte: $|x_0^{(1)} - s_1| = \frac{3}{26} > |x_2 - s_1| = \frac{1}{208}$, m.a.W. x_2 ist qualitativ besser.