Klasse ST13a | **MAE1 Schlussprüfung** | 13. Januar 2014

Name:

Hilfsmittel: Formelsammlung, eigene Zusammenfassung, **ohne** elektronische Hilfsmittel.
Zeit: 120 Minuten.
Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Die Kurve eines Polynoms $4-$ ten Grades ist symmetrisch zur $y-$ Achse und hat in $(2,0)$ einen Wendepunkt W_1 so, dass die Wendetangente in W_1 die Steigung -2 hat. Bestimmen Sie dieses Polynom.

Aufgabe 2

a) Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x) = \frac{|x| - 1}{|x - 1|}$$

Geben Sie den Definitions–, Wertebereich, Sprungstellen, Asymptoten, NS an, graphische Darstellung, Einheiten: $1 \hat{=} 4$ Häuschen auf beiden Achsen.

b) Gegeben ist die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

Bestimmen Sie ihre Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren, oder begründen Sie, warum sie nicht existieren:

a$_1$) $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{ \dfrac{3 \cdot 10^n + 4 \cdot 10^{2n}}{4 \cdot 10^{n-1} - 2 \cdot 10^{2n-1}} \right\}, \ n \in \mathbb{N}$

a$_2$) $\lim\limits_{k\to\infty} \left\{ \left(1 + (-1)^{k+1}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{k}\right) \right\}, \ k \in \mathbb{N}$

b) Berechnen Sie die Summe $s_b = 250 + 244 + 238 + \ldots + 40$.

Aufgabe 4

a) Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x}$$

- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.
- Bestimmen Sie mit Hilfe der linearen Approximation von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ einen Näherungswert für $f(-1)$ und vergleichen Sie mit dem exakten Wert.

b) Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

- Schränken Sie den Definitionsbereich von f so ein, dass f umkehrbar ist.
- Geben Sie den zugehörigen Wertebereich an.
- Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f mit den entsprechenden Bereichen.
- graphische Darstellung

Bitte wenden

Aufgabe 5

An einen Halbkreis mit Radius r wird ein halb so grosser Halbkreis angefügt, daran wieder ein halb so grosser Halbkreis usw., so dass eine Spirale entsteht (siehe Abbildung). Berechnen Sie den Grenzwert der Länge der Spirale für $n \to \infty$, wobei n die Anzahl der zusammengesetzten Halbkreise bezeichnet. In welchen Punkt P dreht die gegebene Spirale?

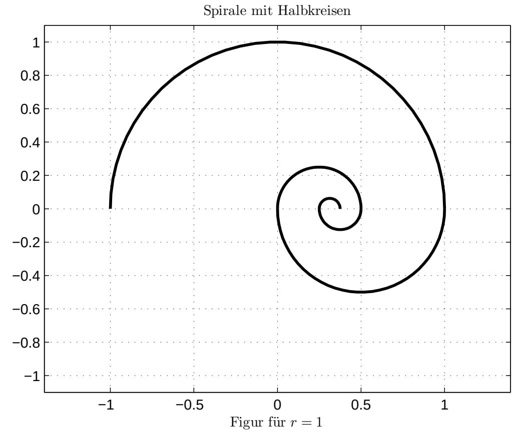

Abbildung 1: Spirale, die nach innen dreht.

Aufgabe 6

- Der Parabelbogen $y = f(x)$ schneidet die $y-$ Achse in $(0, 27)$ und die $x-$ Achse in den Punkten $(\pm 3, 0)$.

  Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Parabelbogens.

- Dem Parabelbogen wird ein rechtwinkliges Dreieck ΔABC so einbeschrieben, dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird.

  Berechnen Sie die Koordinaten der drei Punkte A, B und C. Wie gross wird der maximale Flächeninhalt?

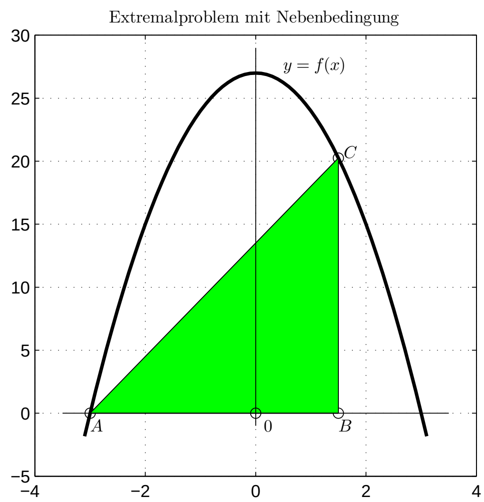

Abbildung 2: Extremalproblem

Aufgabe 7

Bestimmen Sie von folgenden Funktionen die erste und zweite Ableitung

a) $f(x) = \dfrac{ax^2}{ax+b}$ b) $g(t) = \sqrt[3]{1-t}$ c) $h(z) = \tan(z)$

Aufgabe 8

Vollständige Kurvendisskussion von

$$y = f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Def–, Wertebereich, Symmetrien, NS, lokale Extrema, Wendepunkte, asymptotisches Verhalten, Pole,

ST13a MAE1 Lösungen Schlussprüfung 13.01.14

Lösung 1

Ansatz: $y = p_4(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$,
aus Symmetriegründen nur gerade Potenzen in x

$$p_4'(x) = 4a_4x^3 + 2a_2x \qquad p_4''(x) = 12a_4x^2 + 2a_2$$

$W_1(2,0)$ ist Wendepunkt mit Steigung der Wendetangente -2:

$$p_4(2) = 0 \qquad p_4''(2) = 0 \qquad p_4'(2) = -2$$

liefert uns das Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 16a_4 & + & 4a_2 & + & a_0 & = & 0 \\ 48a_4 & + & 2a_2 & & & = & 0 \\ 32a_4 & + & 4a_2 & & & = & -2 \end{array}\right.$$

Lösung der zweiten und dritten Gleichung nach a_4 und a_2: $a_4 = \frac{1}{32}$, $a_2 = -\frac{3}{4}$ einsetzen in der ersten Gleichung: $a_0 = \frac{5}{2}$, also

$$p_4(x) = \frac{1}{32} \cdot x^4 - \frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{5}{2}$$

Lösung 2

a) $\mathbb{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, NS: $x = -1$, Schnittpunkt mit der $y-$ Achse: $(0, -1)$

Fallunterscheidung:

- $x \geq 0$: $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$
  - i) $x - 1 > 0$: $x > 1$ $f(x) = \frac{x-1}{x-1} = 1$ für $x > 1$
  - ii) $x - 1 < 0$: $x < 1$ $f(x) = \frac{x-1}{-x+1} = -1$ für $0 \leq x < 1$
- $x < 0$: $f(x) = \frac{-x-1}{|x-1|}$
  - i) $x - 1 > 0$: $x > 1$ Widerspruch
  - ii) $x - 1 < 0$: $x < 1$ $f(x) = \frac{-x-1}{-x+1}$ für $x < 0$

d.h. $x = 1$ ist eine Sprungstelle und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, d.h. $y = 1$ ist horizontale Asymptote und schliesslich $\mathbb{W}(f) = [-1, 1]$

b) Faktorisierung des Nenners: (mit Hilfe des Hornerschemas)

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$$

Ansatz für die PBZ:

$$r(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Zähler:

$$2x^2 + 3x - 1 = A(x^2 - 1) + B(x+1) + C(x-1)^2$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{lrcl} x^2: & 2 & = & A + C \\ x^1: & 3 & = & B - 2C \\ x^0: & -1 & = & -A + B + C \end{array}$$

Endschema (Gauss–Algorithmus):

A	B	C	1
1	0	1	2
0	1	-2	3
0	0	4	-2

$\Longrightarrow C = -\frac{1}{2}$, $B = 2$ und $A = \frac{5}{2}$

und schliesslich:

$$r(x) = \frac{\frac{5}{2}}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

Lösung 3

a)
- erster Grenzwert:

$$\frac{3 \cdot 10^n + 4 \cdot 10^{2n}}{4 \cdot 10^{n-1} - 2 \cdot 10^{2n-1}} = \frac{10^n \cdot (3 + 4 \cdot 10^n)}{10^{n-1} \cdot (4 - 2 \cdot 10^n)} = 10 \cdot \frac{10^n \cdot \left(\frac{3}{10^n} + 4\right)}{10^n \cdot \left(\frac{4}{10^n} - 2\right)} = 10 \cdot \frac{\left(\frac{3}{10^n} + 4\right)}{\left(\frac{4}{10^n} - 2\right)}$$

  da $\frac{3}{10^n} \longrightarrow 0 \quad \frac{4}{10^n} \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$ ist der gesuchte Grenzwert -20
- zweiter Grenzwert: existiert nicht, da $\left(1 + (-1)^{k+1}\right)$ zwischen 0 und 2 oszilliert.

b) $s_b = \sum\limits_{k=1}^{36} a_k = \frac{36}{2} \cdot (a_1 + a_{36}) = 18 \cdot 290 = 5800 - 580 = 5220$,

wobei $a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$ mit $a_1 = 40$, $d = 6$ und $a_{36} = 250$.

Lösung 4

a) $\mathbb{D}(f) = (-\infty, 1]$, $\mathbb{W}(f) = \mathbb{R}_0^+$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1)$

Linearisierung: $f(x_0) = 1$ und $f'(x_0) = -\frac{1}{2}$, also $y = -\frac{1}{2} \cdot x + 1$, $f(-1) \approx \frac{3}{2}$, $f(-1) = \sqrt{2}$, die Approximation ist etwas zu gross.

absoluter Fehler: $\Delta = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$, relativer Fehler: $\frac{\Delta}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} - 1 \approx 0.0607$

b)
- $\mathbb{D}(f) = [-\pi, \pi]$
- $\mathbb{W}(f) = [-2, 2]$
- $y = f^{-1}(x) = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$ mit $\mathbb{D}(f^{-1}) = [-2, 2]$ und $\mathbb{W}(f^{-1}) = [-\pi, \pi]$
- Graphik

Lösung 5

- Die Halbkreise H_k bilden eine geometrische Folge mit $q = \frac{1}{2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

  es gilt: $H_1 = \frac{1}{2} r\pi$, $H_2 = \frac{1}{2}\frac{r}{2}\pi$, ..., $H_k = \frac{1}{2}\frac{r}{2^{k-1}}\pi$

  Länge der Spirale $L = \sum\limits_{k=1}^{\infty} H_k = H_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 2r\pi$

- $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = P$, wobei $M_k =$ Mittelpunkt des $k-$ten Halbkreises H_k.
  Annahme (o.B.d.A): der erste Mittelpunkt sei im Koordinaten–Ursprung $(0,0)$.
  Alle Mittelpunkte liegen auf der $x-$ Achse, also ist nur die $x-$ Koordinate x_k von M_k zu bestimmen:
  $$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{r}{2} \quad x_3 = r\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \quad x_4 = r\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \quad x_5 = r\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right) \quad \ldots$$
  Die x_k sind die Teilsummen einer geometrischen Folge mit $q = -\frac{1}{2}$, also
  $$x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_k = \frac{r}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + - \ldots\right) = \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{r}{3}$$
  Der gesuchte Punkt ist somit $P\left(\frac{r}{3}, 0\right)$.

Lösung 6

- Parabelbogen:
  $$f(x) = a \cdot (x+3)(x-3) = a \cdot (x^2 - 9) \qquad a < 0$$
  $x = 0$, $y = 27 \Longrightarrow a = -3$
  also
  $$y = f(x) = 27 - 3x^2 \qquad -3 \le x \le 3$$
- Flächeninhalt $F = F(x)$, wobei $-3 \le x \le 3$
  $$F(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+3) \cdot (27 - 3x^2) \stackrel{!}{=} \text{max} \qquad F(\pm 3) = 0$$
  $$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot (27 - 9x^2 - 18x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1 \text{ und } x_2 = -3$$
  d.h. $F(1) = F_{\text{max}} = 48$; Ecken des Dreiecks: $A(-3,0)$, $B(1,0)$ und $C(1,24)$.