Klasse ST12a **MND2 Schlussprüfung** 16. Juni 2014

Name:

Hilfsmittel:	Formelsammlung, **eigene** Zusammenfassung und **ohne** elektronische Hilfsmittel.
Zeit:	120 Minuten.
Bewertung:	Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$(1) \qquad y'(x) = A \cdot y(x) \qquad A = \begin{pmatrix} -501 & -499 \\ -499 & -501 \end{pmatrix} \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Jacobi–Matrix und die Steifheit von (1).

b) Wie muss die Schrittweite $h > 0$ gewählt werden, damit die Trapezmethode numerisch stabil ist?

c) Wie muss h gewählt werden, damit mit der Methode "Euler explizit" 2 Dezimalen korrekt gerundet sind, wie lange müssen Sie diese Schrittweite benutzen?

Aufgabe 2

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(2) \qquad t \cdot \dot{y} = y + 1 \qquad \text{für } t \geq 1 \text{ mit der AB } \; y(1) = y_1 = 0\,.$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von (2).

b) Approximieren Sie die Lösung von (2) mit der Methode der Taylorreihe.
Können Sie ein Bildungsgesetz für die Koeffizienten c_k angeben?

c) Bestimmen Sie mit den Koeffizienten c_k aus b) die Werte y_2, y_3, y_4, ... für $h = 0.2$.
Wie gross ist der globale Fehler von y_{10} ?

Aufgabe 3

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(3) \qquad y''(x) + \frac{1}{1+x^2} \cdot y'(x) + \sin(y(x)) = 0 \qquad \text{mit den AB } \; y(0) = \frac{\pi}{4} \quad y'(0) = 1\,.$$

a) Schreiben Sie (3) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Jacobi–Matrix J des Systems in a).

c) Bestimmen Sie die Jacobi–Matrix J für $x = 0$ und die zugehörige Steifheit $S(0)$ des Systems.

bitte wenden

Aufgabe 4

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(x) = x \cdot y(x) - x \qquad \text{mit der AB } y(0) = 0\,. \tag{4}$$

a) Lösen Sie (4) mit Hilfe einer Potenzreihe.

b) Können Sie ein Bildungsgesetz für die entstehenden Koeffizienten a_k ablesen?

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe in a).

Aufgabe 5

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{y}\,,\ y \geq 0 \qquad \text{mit der AB} \quad y(0) = 0\,. \tag{5}$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von (5).

b) Lösen Sie (5) numerisch mit der Methode "Euler explizit". Wählen Sie dabei die Schrittweite $h = 0.1$ und führen Sie soviele Schritte aus, bis Sie bei $x = 1$ angelangt sind.

c) Können Sie sich das Verhalten von "Euler explizit" in b) erklären?

d) Führen Sie den ersten Schritt mit der Methode "Euler implizit" durch. Unterschied zu b)?

Aufgabe 6

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot x(t) \qquad \text{mit der AB} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

a) Lösen Sie (6) durch Entkopplung.

b) (6) soll nun mit Hilfe der Methode "verbesserter Polygonzug" numerisch gelöst werden. Geben Sie die allgemeine Rekursion für (6) an und führen Sie mit $h = \frac{1}{2}$ den ersten Schritt aus.

c) Vergleichen Sie das Resultat aus b) mit der exakten Lösung aus a). Wie gross ist der absolute Fehler?

Viel Erfolg!

Lösung 1

a) $J = A$, da das gegebene Dgl-System linear ist.

EW von A: $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1002 \cdot \lambda + 2000 \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1000$ und $\lambda_2 = -2$ und damit $S(0) = S(t) = 500$ =konstant.

b) Stabilität: für *alle* $h > 0$, da die Trapezmethode $A-$stabil, d.h. $h\lambda < 0$ genügt.

c) "Euler explizit": $e^{h\lambda} = 1 + (h\lambda) \Longrightarrow \left|\frac{(h\lambda)^2}{2!}\right| < \varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ und damit $h_1 < 10^{-4}$

h_1 mus solange benutzt werden, bis $e^{-1000x} < 5 \cdot 10^{-3} \Longrightarrow x > (-\frac{1}{1000}) \cdot \ln(5 \cdot 10^{-3}) =: x_1 = 0.005298$ ($\frac{x_1}{h_1} = 52.98$!!)

Lösung 2

Die gegebene Dgl ist separierbar.

a)

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{1}{t}dt \quad \Longrightarrow \quad \ln|y+1| = \ln|t| + C \qquad y_a(t) = C \cdot t - 1,\ C \in \mathbb{R}.$$

AB: $y(1) = C - 1 = 0$, also $y(t) = t - 1$, $t \geq 1$

b) Methode der Taylorreihe im allgemeinen Näherungspunkt (t_k, y_k):

$$y(t) = y_k + c_1(t - t_k) + c_2(t - t_k)^2 + c_3(t - t_k)^3 + \ldots$$

$t = t_k + h$, also $h = (t - t_k)$ und damit

$$(7) \qquad y(t_k + h) = y_k + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \ldots$$

$$(8) \qquad \dot{y}(t_k + h) = c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + 4c_4 h^3 + \ldots$$

einsetzen in (2) und Koeffizientenvergleich:

$$(t_k + h) \cdot \big(c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + 4c_4 h^3 + \ldots\big) = \big(y_k + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \ldots\big) + 1$$

$$\begin{array}{llll}
h^0: & t_k c_1 & = y_k + 1 & \Longrightarrow c_1 = \frac{1}{t_k}(y_k + 1) \quad \text{Euler explizit} \\
h^1: & c_1 + 2c_2 t_k & = c_1 & \Longrightarrow c_2 = 0 \\
h^2: & 2c_2 + 3c_3 t_k & = c_2 & \Longrightarrow c_3 = 0 \\
h^3: & 3c_3 + 4c_4 t_k & = c_3 & \Longrightarrow c_4 = 0 \\
h^4: & 4c_4 + 5c_5 t_k & = c_4 & \Longrightarrow c_5 = 0 \\
h^5: & 5c_5 + 6c_6 t_k & = c_5 & \Longrightarrow c_6 = 0 \\
\vdots & \vdots & &
\end{array}$$

D.h. $c_k = 0$ für alle $k \geq 2$ und damit

$$(9) \qquad y_{k+1} = y_k + \frac{1}{t_k}(y_k + 1) \cdot h \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

mit der AB $y_1 = 0$ für $t = 1$.

c)

$$\begin{array}{llll}
y_1 = 0 & & & t_1 = 1 \\
y_2 = y_1 + \frac{1}{1}(y_1+1)\cdot h & = h & & t_2 = 1+h \\
y_3 = y_2 + \frac{1}{1+h}(y_2+1)\cdot h & = 2h & & t_3 = 1+2h \\
y_4 = y_3 + \frac{1}{1+2h}(y_3+1)\cdot h & = 3h & & t_4 = 1+3h \\
y_5 = \ldots & = 4h & & \ldots \\
\ldots & & & \\
y_k = (k-1)h,\ k = 1,2,3,\ldots & & &
\end{array}$$

speziell für $h = 0.2$: $y_k = (k-1)\cdot 0.2$, also $y_2 = 0.2$, $y_3 = 0.4$, $y_4 = 0.6$, ...
Für y_{10}: $t = 1 + 9\cdot 0.2 = 2.8$

$$y_{10} = 9\cdot 0.2 = 1.8 = y(2.8) = 2.8 - 1 \quad \Longrightarrow \; g_{10} = 0$$

Alle berechneten Werte sind exakt!

Lösung 3

a) Substitution:

$$\left\{\begin{array}{lll} z_1 & = & y \\ z_2 & = & y' \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} z_1' & = & z_2 \\ z_2' & = & -\sin(z_1) - \frac{1}{1+x^2}\cdot z_2 \end{array}\right. \qquad z(0) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z'(x) = f(x,z) \qquad f(x,z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\sin(z_1) - \frac{1}{1+x^2}\cdot z_2 \end{pmatrix} \qquad z(0) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$J(x,z) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{1\le i,j\le 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(z_1) & -\frac{1}{1+x^2} \end{pmatrix}$$

c)

$$J(0,z(0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

EW von $J(0,z(0))$: $p_{J(0,z(0))} = \lambda^2 + \lambda + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Longrightarrow \lambda_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm j\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$ und damit $S(0) = 1$

Lösung 4

a) Ansatz für $y(x)$:

$$\begin{array}{lll} p(x) & = & \sum\limits_{k=0}^{\infty} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \\ p'(x) & = & a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots \end{array}$$

AB: $y(0) = a_0 = 0$

Einsetzen in (4) und Koeffizientenvergleich nach Potenzen in x:

$$
\begin{array}{llll}
x^0: & a_1 = 0 & & \\
x^1: & 2a_2 = -1 & \Longrightarrow a_2 = & -\dfrac{1}{2} = & -\dfrac{1}{1!\cdot 2^1} \\
x^2: & 3a_3 = a_1 & \Longrightarrow a_3 = & 0 & \\
x^3: & 4a_4 = a_2 & \Longrightarrow a_4 = & -\dfrac{1}{2\cdot 4} = & -\dfrac{1}{2!\cdot 2^2} \\
x^4: & 5a_5 = a_3 & \Longrightarrow a_5 = & 0 & \\
x^5: & 6a_6 = a_4 & \Longrightarrow a_6 = & -\dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6} = & -\dfrac{1}{3!\cdot 2^3} \\
\vdots & \vdots & & &
\end{array}
$$

b) Gesetzmässigkeit:

$$a_{2k+1} = 0 \qquad a_{2k} = -\frac{1}{k!\cdot 2^k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

c) Da nur gerade Potenzen in x vorkommen:

$$\rho^2 = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{2k}}{a_{2k+2}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!\cdot 2^{k+1}}{k!\cdot 2^k} = \lim_{k\to\infty} (k+1)\cdot 2 = \infty$$

und damit: $\rho = \infty$, d.h. die Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung 5

a) (5) ist separierbar: $y_h(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{C}{2}\right)^2$, AB $\Longrightarrow C = 0$, also $y(x) = \frac{x^2}{4}$

b) Euler explizit: $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$; hier ist $f(x, y) = \sqrt{y}$ und $y(0) = y_0 = 0$.
Also $y_1 = y_0 + h\sqrt{y_0} = 0$ und $y_{k+1} = y_k + h\cdot 0 = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

c) Mit der AB $y_0 = 0$ werden alle $y_k = 0$, da f unabhängig von x ist.

d) $y_1 = y_0 + h\sqrt{y_1} \Longrightarrow y_1 = h^2$, d.h. $y_1 > 0$. M.a.W.: hier wird die Lösung qualitativ richtig nachgebildet. Im Unterschied zu b) wird hier die nicht–triviale Lösung erhalten.

Lösung 6

a) EWP von A: EW $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$ mit den zugehörigen EV $v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
also $x_h(t) = c_1 \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Bestimmung der c_k: mit der AB erhalten wir $c_1 = 0$ und $c_2 = 2$ und damit $x(t) = 2\cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \geq 0$.

b) "verbesserter Polygonzug" für $h > 0$:

$$x^{(k+1)} = \left(I_2 + h\cdot A + \frac{h^2}{2}\cdot A^2\right)\cdot x^{(k)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$I_2 + h\cdot A + \frac{h^2}{2}\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 + 3h + 5\frac{h^2}{2} & -2h - h^2 \\ 2h + h^2 & 1 - 2h \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$h = \frac{h}{2}$

$$I_2 + h \cdot A + \frac{h^2}{2} \cdot A^2 = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 25 & -10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$x^{(1)} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 25 & -10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} x^{(0)} = \frac{5}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Delta x = \left(2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und damit haben wir einen absoluten Fehler von $\|\Delta x\|_2 = \left|\left(2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{4}\right)\right| \cdot \sqrt{5}$.