Klasse ST12a **MND2 erster Test** 26. März 2014

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

(1) $$\dot{x} = Ax + g(t) \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1).
- Tipp: Ansatz für $x_p(t) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Differentialgleichung

(2) $$\ddot{y} + 2\dot{y} + 4y = 0$$

a) Schreiben Sie (2) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Systems in a), Lösung in *reeller* Schreibweise.

c) Wie gross sind ω_0, bzw. ω_δ?
Wie gross werden die Resonanzfrequenz ω_r und die zugehörige maximale Amplitude der partikulären Lösung, falls (2) mit $g(t) = F_0 \cdot \cos(\omega t)$, $F_0 > 0$, angeregt wird?

Aufgabe 3

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

(3) $$\dot{x} = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Lösen Sie (3) durch Entkopplung.

b) Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl. Σ_{neu}.

c) Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl. Σ_{e}.

d) Geben Sie den stabilen bzw. den instabilen Unterraum an.

ST12a   MND2   Lösungen erster Test   26.03.14

Lösung 1

$x_a(t) = x_h(t) + x_p(t)$, wobei $x_h(t)$ durch Entkopplung (EWP von A)

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \overset{!}{=} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1$$

zugehörige EV:

$$v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(da $A = A^T$, gilt: EV zu verschiedenen EW sind orthogonal, i.e. $v^{(1)} \perp v^{(2)}$)
und damit

$$x_h(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Bestimmung der partikulären Lösung:

$$\dot{x}_p(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvergleich:

$$t^1: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$t^0: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

und schliesslich:

$$x_a(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{t}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Lösung 2

a) mit Hilfe der Substitution

$$\begin{cases} z_1 & = & y \\ z_2 & = & \dot{y} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{z} = Az \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

b) EWP von A:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 4 \overset{!}{=} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_{1.2} = -1 \pm j \cdot \sqrt{3}$$

zugehörige EV

$$v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + j \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} = \mu_1 \cdot \left(u^{(1)} + j \cdot w^{(1)} \right) \qquad u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$v^{(2)} = \left(v^{(1)}\right)^*$

und damit

$$z_h(t) = 2 \cdot e^{-t} \left\{ \left[a_1 \cdot \cos{(\sqrt{3}t)} - b_1 \sin{(\sqrt{3}t)}\right] \cdot u^{(1)} - \left[a_1 \cdot \sin{(\sqrt{3}t)} + b_1 \cos{(\sqrt{3}t)}\right] \cdot w^{(1)} \right\} \; a_1, b_1 \in \mathbb{R}$$

c) $\omega_0 = 2$ und $\omega_\delta = \sqrt{3}$, da $\delta = 1$

$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{2} < \omega_\delta < \omega_0$ und $C_{\mathsf{max}} = C(\omega_r) = \frac{F_0}{2\delta\omega_\delta} = \frac{F_0}{2\sqrt{3}} > \frac{F_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{4} = C(0)$

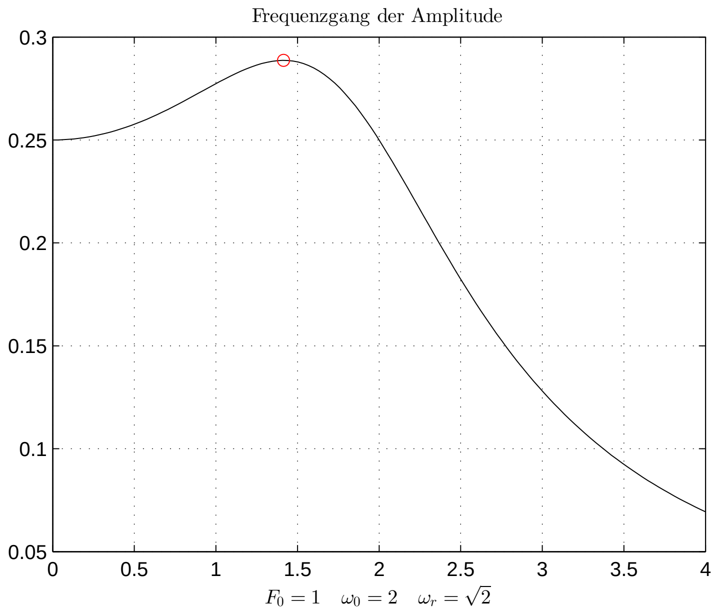

Abbildung 1: Frequanzgang der Amplitude bei periodischer Anregung mit $F_0 = 1$

`test1_2014_Aufgabe2c.m`

Lösung 3

a) EWP von A: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ mit den zugehörigen EV $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, d.h.

$$x_h(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

b) $x_{\mathsf{neu}_1} = c_1 e^{3t}$, $x_{\mathsf{neu}_2} = c_2 e^{-t}$, also $x_{\mathsf{neu}_1} \cdot x_{\mathsf{neu}_2}^3 = c_1 \cdot c_2^3$ und damit

$$x_{\mathsf{neu}_1} = c_1 \cdot c_2^3 \cdot \frac{1}{x_{\mathsf{neu}_2}^3} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

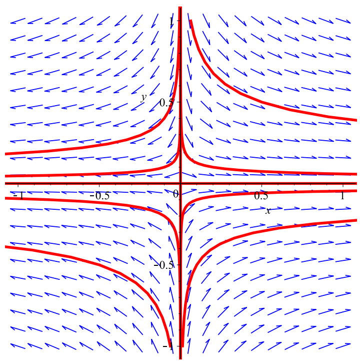

Abbildung 2: Phasenporträt für $\dot{x}_{\mathsf{neu}} = A_{\mathsf{neu}} x_{\mathsf{neu}}$ bzgl. Σ_{neu}
`phasenportraet_1.mws`

c)

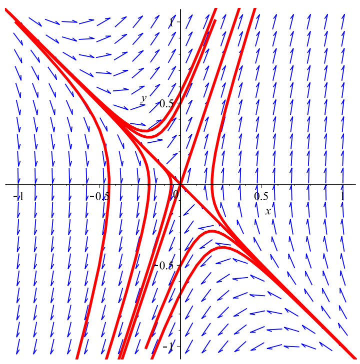

Abbildung 3: Phasenporträt für $\dot{x} = Ax$ bzgl. Σ_{e}
`phasenportraet_1.mws`

d) instabiler UR: $E_{\lambda_1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ und stabiler UR: $E_{\lambda_2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$