Klasse ST12a **MND2 zweiter Test** 07. Mai 2014

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' = y' - x \cdot y \qquad y(0) = \alpha \qquad y'(0) = \beta \tag{1}$$

a) Schreiben Sie (1) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Die Lösung von des Systems in a) soll numerisch mit dem Verfahren von Heun der Ordnung $p = 2$ approximiert werden:

- formulieren Sie den allgemeinen Schritt und
- führen Sie den ersten Schritt von x_0 nach $x_1 = h$ durch.

Aufgabe 2

Gegeben ist das folgende RK–Verfahren der Ordnung $p = 2$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \hline & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \tag{2}$$

a) Überprüfen Sie mit dem Testbeispiel $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, ob (2) die behauptete Ordnung hat.

b) (2) soll adaptiv gesteuert werden.

Damit der Aufwand möglichst klein bleibt, wird zur Steuerung das folgende RK–Verfahren mit $p = 3$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \dots & & \\ 1 & \dots & \dots & \\ \hline & \dots & \dots & \dots \end{array} \tag{3}$$

gewählt.

Vervollständigen Sie das Butcher–Tableau in (3).

c) Geben Sie den Schätzwert für $d_{k+1}^{(\mathsf{RK2})}$ mit Hilfe von (3) an, womit die Schrittweite gesteuert wird.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = x + y \qquad \text{mit der AB } y(0) = 0. \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von (4).

b) Die Lösung von (4) soll nun numerisch mit der Trapezmethode und Schrittweite $h = 0.5$ approximiert werden.

Formulieren Sie den allgemeinen Schritt und führen Sie anschliessend die beiden ersten Schritte aus.

c) Geben Sie den globalen Fehler für $x = 1$ an.

ST12a MND2 Lösungen zweiter Test 07.05.14

Lösung 1

a) Substitution

$$\begin{cases} z_1 &= y \\ z_2 &= y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= -x \cdot z_1 + z_2 \end{cases}$$

also

$$z' = A(x) \cdot z \qquad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \qquad z(0) = z^{(0)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

b) Heun, $p = 2$: $z^{(k)}$ = numerische Approximation für $z(x_k)$, $x_k = x_0 + kh$, wobei $x_0 = 0$:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

und damit:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, z^{(k)}) = A(x_k) \cdot z^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x_k & 1 \end{pmatrix} \cdot z^{(k)} \\ k_2 &= f(x_k + h, z^{(k)} + h \cdot k_1) = A(x_k + h) \cdot \left(z^{(k)} + h \cdot k_1\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(x_k + h) & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(z^{(k)} + h \cdot A(x_k) \cdot z^{(k)}\right) \\ z^{(k+1)} &= z^{(k)} + \frac{h}{2} \cdot \{A(x_k) + A(x_k + h)\} \cdot z^{(k)} + \frac{h^2}{2} \cdot A(x_k + h) A(x_k) \cdot z^{(k)} \qquad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

erster Schritt: $x_0 = 0$ und $x_1 = h$

$$\begin{aligned} z^{(1)} &= z^{(0)} + \frac{h}{2} \cdot \{A(0) + A(h)\} \cdot z^{(0)} + \frac{h^2}{2} \cdot A(h) A(0) \cdot z^{(0)} \\ &= z^{(0)} + \frac{h}{2} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -h & 1 \end{pmatrix} \right\} \cdot z^{(0)} + \frac{h^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -h + 1 \end{pmatrix} \cdot z^{(0)} \\ &= \left\{ I_2 + \frac{h}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -h & 2 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -h + 1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösung 2

a)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \hline & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}$$

und damit

$$\begin{aligned} k_1 &= \lambda y_k \\ k_2 &= \lambda \left(y_k + \frac{h}{3} \cdot k_1 \right) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2} \cdot (-k_1 + 3k_2) = \underbrace{\left(1 + (h\lambda) + \frac{(h\lambda)^2}{2} \right)}_{\text{Taylorpol. } 2-\text{ter Ordnung von} e^{h\lambda}} \; y_k \end{aligned}$$

d.h. die Ordnung von (2) ist tatsächlich $p = 2$.

b)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

c)

$$\begin{aligned} d_{k+1}^{RK2} &= y(x_{k+1}) - y(x_k) - \frac{h}{2} \cdot \left(-\overline{k}_1 + 3\overline{k}_2\right) = O(h^3) \\ d_{k+1}^{RK3} &= y(x_{k+1}) - y(x_k) - \frac{h}{4} \cdot \left(3\overline{k}_2 + \overline{k}_3\right) = O(h^4) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} d_{k+1}^{RK2} &= \frac{h}{4} \cdot \left(3\overline{k}_2 + \overline{k}_3\right) - \frac{h}{2} \cdot \left(-\overline{k}_1 + 3\overline{k}_2\right) + d_{k+1}^{RK3} \\ &= \underbrace{\frac{h}{4} \cdot \left(2\overline{k}_1 - 3\overline{k}_2 + \overline{k}_3\right)}_{=O(h^3)} + d_{k+1}^{RK3} \end{aligned}$$

Somit kann

$$\frac{h}{4} \cdot \|(2k_1 - 3k_2 + k_3)\|$$

zur adaptiven Steuerung der Schrittweiten benutzt werden.

Zusätzlicher Aufwand: nur eine Funktionsauswertung, da die beiden Verfahren eingebettet sind.

Lösung 3

Die inhomogene Dgl (4) ist linear mit konstanten Koeffizienten.

a)

$$y(x) = e^x - (1 + x), \qquad x \geq 0.$$

b) $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ und $x_2 = 1$ mit der AB $y_0 = 0$.

Trapezmethode:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \left\{ \underbrace{(x_k + y_k)}_{=f(x_k,y_k)} + \underbrace{(x_{k+1} + y_{k+1})}_{=f(x_{k+1},y_{k+1})} \right\} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

also

$$\left(\frac{2-h}{2}\right) \cdot y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \{x_k + y_k + x_{k+1}\}$$

und damit

$$y_{k+1} = \left(\frac{2}{2-h}\right) \cdot \left\{ y_k + \frac{h}{2} \cdot \{x_k + y_k + x_{k+1}\} \right\} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

erster Schritt mit $h = \frac{1}{2}$:

$$y_1 = \frac{4}{3} \cdot \left\{ y_0 + \frac{1}{4} \cdot \{x_0 + y_0 + x_1\} \right\} = \frac{1}{6} \approx y(0.5)$$

zweiter Schritt mit $h = \frac{1}{2}$:

$$y_2 = \frac{4}{3} \cdot \left\{ y_1 + \frac{1}{4} \cdot \{x_1 + y_1 + x_2\} \right\} = \frac{7}{9} \approx y(1)$$

c) der globale Fehler beträgt:

$$g_2 = |y(1) - y_2| = \left| (e^1 - 2) - \frac{7}{9} \right| = 0.0595$$