Klasse ST13a **MAE2 Schlussprüfung** 17. Juni 2014

Name:

Hilfsmittel:	Formelsammlung, eigene Zusammenfassung, **ohne** elektronische Hilfsmittel.
Zeit:	120 Minuten.
Bewertung:	Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

- Schwerpunkt
- bestimmtes Integral, Beträge
- Integration mit/ohne Substitution
- Folgen/Reihen, Konvergenzradius
- Taylorreihen, Abschätzung des Fehlers
- Bernoulli
- Potenzreihen
- ...

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion F

$$F(p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x) - \sin(p)| \, dx \tag{1}$$

in Abhängigkeit von p.

a) Stellen Sie $y = \sin(x)$ und $y = \sin(p)$ für $p = \frac{\pi}{4}$ auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ graphisch dar und bestimmen Sie den Flächeninhalt $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

b) Bestimmen Sie $F(p)$ für $0 \leq p \leq \frac{\pi}{2}$.

c) Bestimmen Sie die Extremalwerte von $F(p)$ auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie den gegebenen Grenzwert mit Hilfe der Regel von Bernoulli–l'Hôpital

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(x)}{e \cdot \left[\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}\right]}$$

b) Gegeben ist die Gleichung

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \tag{2}$$

Bestimmen Sie näherungsweise Lösungen von (2), indem Sie den Term $\cos(x)$ durch das Taylorpolynom vierten Grades für $x_0 = 0$ ersetzen.

Aufgabe 3

Gegeben sind die beiden Kurven

$$y = f_1(x) = 2^x - 1 \qquad y = f_2(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \qquad x \geq 0$$

a) Stellen Sie die beiden Kurven graphisch dar und bestimmen Sie den Flächeinhalt A, den die beiden Kurven im ersten Quadranten miteinander einschliessen.

b) Bestimmen Sie den Flächenchwerpunkt S von A.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $I_a = \int\limits_0^c (cx)^c \, dx \quad c > 0$ b) $I_b = \int\limits_2^x (cx)^c \, dc \quad x > 2$

Aufgabe 5

a) Wie gross ist die Fläche zwischen den Kurven $y = f_1(x) = \frac{x^2}{4}$ und $y = f_2(x) = \frac{8}{x^2+4}$, graphische Darstellung.

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von

$$y = f(x) = \int\limits_0^x x^2 z^3 \, dz$$

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{3^k - 2^k}$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Potenzreihe

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k \cdot (x-2)^k}{\sqrt{(5k-2) \cdot 3^k}}$$

$x_0 = ?$

c) Entwickeln Sie

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

in eine Potenzreihe $p(x)$. Geben Sie x_0 und den Konvergenzradius ρ an.

Ist $p(x)$ für $x = 4$ konvergent? (*mit* Begründung)

d) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $t_4(f)$ $4-$ ten Grades an der Stelle $x_0 = 0$ der Funktion

$$f(x) = \left(e^{-x} - 1\right)^2$$

Aufgabe 7

Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-2x}$, sowie eine positive reelle Zahl a.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S der Fläche, die im Intervall $I = [0, a]$ zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der $x-$ Achse eingeschlossen wird.

b) Bestimmen Sie die Grenzwerte der in a) berechneten Koordinaten für $a \to \infty$.

Aufgabe 8

a)

$$I_a = \int\limits_1^{\sqrt{e^\pi}} \frac{\sin\left(\ln\left(x\right)\right)}{x}\, dx$$

Bestimmen Sie den Wert von I_a mit Hilfe einer geeigneten Substitution.

b)

$$I_b = \int\limits_1^{2} \frac{e^{\left(\frac{1}{x^2}+2\right)}}{x^3}\, dx$$

Bestimmen Sie den Wert von I_b mit Hilfe einer geeigneten Substitution.

Aufgabe 9 *Optimierung, Bsp Heidi*

Gegeben sind die beiden Kurven

$$y = f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{und} \qquad y = f_2(x) = -\frac{4}{x^2} \qquad x > 0$$

a) Stellen Sie die beiden Kurven im selben Koordinatensystem graphisch dar.

b) Ein achsenparalleles Rechteck soll so platziert werden, dass eine Rechteckseite auf der $y-$ Achse zu liegen kommt und je eine Ecke auf einer der beiden Kurven (graphische Darstellung).

c) Bestimmen Sie dasjenige Rechteck mit *minimalem* Flächeninhalt.

Aufgabe 10 *evtl.??*

a) Entwickeln Sie

$$f(x) = e^{-x^2}$$

in eine Taylorreihe mit $x_0 = 0$ und geben Sie die ersten fünf Terme an.

b) Bestimmen Sie

$$I = \int\limits_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

mit Hilfe von a) auf 3 Dezimalen genau. Wieviele Summanden sind dazu nötig?

Aufgabe 11

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x} + 1$$

a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $y = f(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 4$.

b) Durch Drehung der Kurve um die $x-$ Achse im Intervall $0 \leq x \leq 4$ entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie sein Volumen.

Aufgabe 12

Wir betrachten ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Eckpunkte $A(1,0)$, $B(x_b,0)$, $x_b > 1$ und $C(1,y_c)$, $y_c < 0$ so, dass die Länge der Schenkel $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ ist.

a) Stellen Sie das Dreieck ABC graphisch dar und bestimmen Sie seinen Schwerpunkt S.

b) Das Dreieck wird um die $x-$ Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen V_x des dabei entstehenden Rotationskörpers.

c) Das Dreieck wird um die $y-$ Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen V_y des dabei entstehenden Rotationskörpers.

Aufgabe 13

Gegeben ist die von der Kurve $y = \sqrt{2px}$ und der $x-$ Achse für $0 \leq x \leq a$ eingeschlossene Fläche (Parameter $a > 0$, $p > 0$)

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S dieser Fläche.

b) Für welche Werte der beiden Parameter a und p liegt S auf der durch die Gleichung $y = x$ beschriebenen Geraden ?

Aufgabe 14 *alt*

Die beiden Kurven $y = f_1(x) = -2x^2 + 2$ und $y = f_2(x) = x^2 - 1$ begrenzen ein endliches Flächenstück.

- Graphische Darstellung
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt A.
- Bestimmen Sie den Schwerpunkt S dieses Flächenstücks.

Aufgabe 15 *alt*

Gegeben ist die Kurve

$$y = f(x) = 2 \cdot (x+1)^{\frac{3}{2}}$$

über dem Intervall $[-1, 1]$.

a) Bestimmen Sie die Bogenlänge des Kurvenstücks.

b) Das Kurvenstück wird um die $x-$ Achse rotiert. Bestimmen Sie das Volumen des entstehenden Körpers.

Aufgabe 16 *alt*

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (x-1) \cdot e^{-x}$$

a) Skizzieren Sie die Kurve $y = f(x)$. Bestimmen Sie dazu die Nullstellen, Intervalle, in denen $f(x) \geq 0$, bzw. $f(x) \leq 0$, sowie das Verhalten der Funktion für $x \longrightarrow \infty$.

b) Bestimmen Sie die gesamte Fläche, die die Funktion mit der $x-$ Achse über dem Intervall $[0, \infty)$ einschliesst.

Aufgabe 17

a) Gegeben ist die Potenzreihe

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)}{2^k} \cdot x^k \tag{3}$$

- Was ist hier das Entwicklungszentrum x_0?
- Student Y behauptet, dass (3) für $x = 2.5$ konvergiert. Hat er Recht? (*mit* Begründung)

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Taylorreihen den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{e^x - 1}$$

Aufgabe 18

Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x) = \int_0^x \{\cos(t) - \sin(t)\} \, dt$$

a) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion f.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt A zwischen der $x-$ Achse und der Kurve $y = f(x)$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Aufgabe 19 *alt*

a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin(x)$$

in eine Taylorreihe mit Entwicklungszentrum $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Geben Sie die ersten 5 Summanden an.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Potenzreihe

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k \cdot (x-4)^k}{\sqrt{(3k-2) \cdot 2^k}}$$

$x_0 = ?$

Aufgabe 20 *alt*

a) Entwickeln Sie

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

in eine Taylorreihe mit $x_0 = 0$ und geben Sie die ersten fünf Terme an.

b) Bestimmen Sie

$$I = \int_0^{0.1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \, dx$$

mit Hilfe von a) auf 5 Dezimalen genau. Wieviele Summanden sind dazu nötig?

Aufgabe 21 *alt*

a) Bestimmen Sie x aus der Gleichung

$$\sin(x) = \frac{3}{4} \cdot x$$

indem Sie für $\sin(x)$ das Taylorpolynom $3-$ ten Grades verwenden.

b) Bestimmen Sie das bestimmte Integral

$$I = \int_3^5 \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} \, dx$$

mit Hilfe der Substituion $u := x^2 - 1$

Lösung 1

a)

b)

Lösung 2

a)

b)

Lösung 3

a)

b)

Lösung 4

a)

b)

Lösung 5

a)

b)

Lösung 6

a)

b)