Klasse ST13a **MAE2 zweiter Test** 06. Mai 2014

Name:

Aufgabe 1

a) Für welche Werte von $a \geq \pi$ ist die folgende Gleichung

$$\int_{\pi}^{a} \cos(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \tan(a)$$

erfüllt? Geben Sie *alle* Lösungen für a an.

b) Es sei $a > 0$ gegeben. Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass die folgende Gleichung

$$\int_{c}^{\infty} \frac{1}{x^{1+a}}\, dx = 1$$

gültig ist.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x \cdot e^{-x^2+1}$.

a) Stellen Sie die Kurve $y = f(x)$ graphisch dar. Gibt es Symmetrien?

b) Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution eine Stammfunktion von f.

c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt, den $y = f(x)$ mit der $x-$ Achse über dem Intervall $[-\frac{1}{2}, 1]$ einschliesst. (Terme in e stehen lassen, und algebraisch so weit wie möglich vereinfachen.)

Aufgabe 3

Gegeben sind die beiden Kurven $y = f_1(x) = -\frac{x^2}{2} + 6$ und $y = f_2(x) = -2x^2 + 30$.

a) Stellen Sie die beiden Kurven graphisch dar.
Einheiten: $x-$ Achse, $1 \hat{=} 2$ Häuschen, $y-$ Achse, $6 \hat{=} 3$ Häuschen.

b) Bestimmen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks A, das durch die beiden Kurven begrenzt wird.

c) Die Gerade $y = g(x) = 22$ teilt das in b) berechnete Flächenstück in zwei Teile.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des unteren Teilstücks, das durch die drei Kurven $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ und $y = g(x)$ begrenzt wird.

MAE2 Lösungen zweiter Test 06.05.14

Lösung 1

a)

$$\sin(a) = \frac{1}{2} \cdot \tan(a) \qquad 2\sin(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)} \qquad \sin(a) \cdot (2\cos(a) - 1) = 0$$

also: $\sin(a) = 0$, d.h. $a_k = k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$ oder $\cos(a) = \frac{1}{2}$, d.h. $a_k = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k = 1, 2, \ldots$

b)

$$\int_c^\infty \frac{1}{x^{1+a}}\,dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_c^\lambda \frac{1}{x^{1+a}}\,dx = 1$$

$$I(\lambda) = \int_c^\lambda \frac{1}{x^{1+a}}\,dx = (-\frac{1}{a}) \cdot x^{-a}\Big|_c^\lambda = (-\frac{1}{a}) \cdot \left(\frac{1}{\lambda^a} - \frac{1}{c^a}\right)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c^a} \stackrel{!}{=} 1 \qquad c = \frac{1}{\sqrt[a]{a}}$$

Lösung 2

a) f ist ungerade, $x = 0$ ist einfache NS, $(0, 0)$ ist auch Wendepunkt, $x-$ Achse ist horizontale Asymptote falls $x < 0 : f(x) < 0$ und falls $x > 0 : f(x) > 0$

b) Substitution: $u(x) = -x^2 + 1$, $du = (-2x) \cdot dx$, also

$$\int 3x \cdot e^{-x^2+1}\,dx = \int (-\frac{3}{2}) \cdot e^u\,du = (-\frac{3}{2}) \cdot e^{-x^2+1} + C$$

c) Bestimmung des Flächenihalts über dem Intervall $[-\frac{1}{2}, 1]$:

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^0 -f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3}{2} \cdot e^{-x^2+1}\Big|_{-\frac{1}{2}}^0 + (-\frac{3}{2}) \cdot e^{-x^2+1}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\left(2e - e^{\frac{3}{4}} - 1\right) \approx 3.47935$$

Lösung 3

Die beiden gegebenen Funktionen sind gerade!

a) Graphik

b) Schnittpunkte der beiden Kurven: $S_{1.2}(\pm 4, -2)$

$$A = 2\int_0^4 [f_2(x) - f_1(x)]\,dx = 2\int_0^4 \left[(-2x^2 + 30) - \left(-\frac{x^2}{2} + 6\right)\right]\,dx = 128$$

c) Schnittpunkte von $y = g(x)$ und $y = f_2(x)$: $P_{1.2}(\pm 2, 22)$

Sei A_1 das Flächenstück unterhalb von $y = f_2(x)$ und oberhalb von $y = g(x)$, dann ist der gesuchte Flächeinhalt $A_2 = A - A_1$, also

$$A_1 = 2\int_0^2 [f_2(x) - g(x)]\,dx = 2\int_0^2 [-2x^2 + 30 - 22]\,dx = \frac{64}{3} \qquad A_2 = 128 - \frac{64}{3} = \frac{320}{3}$$