1. Vordiplomprüfung 2000

Studiengang:	DAP	Expertinnen/Experten:	R. Schlegel
Jahr:	2000		
Klasse:	DP1a	Datum:	11. September 2000
Dozentin/Dozent:	H. Ungricht	Zeit:	08.00-11.00 Uhr

Schriftliche Prüfung in Mathematische Grundlagen und Numerik

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, Formelsammlung, selbstverfasste Zusammenfassung

Darstellung: –Beschreiben Sie die Blätter nur einseitig.
–Beginnen Sie jede neue Aufgabe auf einem separaten Blatt.
–Dokumentieren Sie sämtliche Lösungen:
Lösungsweg, Zwischenergebnisse und verwendete Rechnerprogramme sind anzugeben.

Bewertung: Alle Aufgaben werden gleich gewichtet. Für 5 oder mehr richtig gelöste Aufgaben wird die Note 6 erteilt.

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrema (exakte Werte) der Funktion
$y = f(x) = 3 \cdot x + 2 \cdot \left|\sin(3 \cdot x)\right|$ für $0 \le x \le \pi$.

b) Bestimmen Sie die Winkel zwischen den Halbtangenten an den „Knickstellen" der Funktion (Knickstelle: Unstetigkeitsstelle der 1-ten Ableitung der Funktion im Innern des Definitionsbereichs).

Aufgabe 2

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie a und b so, dass $a \cdot b < 0$ und $p_A(\lambda) = (1-\lambda) \cdot \left\{(1-\lambda)^2 - 1\right\}$ das charakteristische Polynom der Matrix A ist.

Kandidatinnen/Kandidaten: nach Prüfung an Dozierende zurück
Spätestens bis Prüfungsbeginn: 1 Exemplar (ohne Beilagen) zH. Schulsekretariat
1 Exemplar zH. der beteiligten Expertinnen/Experten

b) Lösen Sie für die Werte von a und b aus **a)** das Eigenwertproblem für die Matrix A. Bestimmen Sie eine Matrix T, sodass $D = T^{-1} \cdot A \cdot T$ eine Diagonalmatrix wird.

c) Für welche Werte von a und b ist die Matrix A invertierbar?

Aufgabe 3

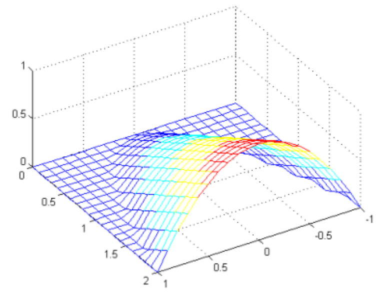
Bestimmen Sie das Volumen des skizzierten, auf der horizontalen xy – Ebene stehen Körpers.

Alle Vertikalschnitte parallel zur xz – Ebene sind Segmente kongruenter, quadratischer Parabeln

$$z = h - x^2$$

mit den Scheitelpunkten auf der Strecke OS, welche unten durch die xy – Ebene begrenzt werden. $O = O(0/0/0)$, $S = S(0/2/1)$

Das Resultat ist *exakt* anzugeben.



Aufgabe 4

Gegeben sind eine Pyramide $ABCDS$ mit den Ecken $A = A(0/0/0)$, $B = B(14/0/0)$, $C = C(14/21/0)$, $D = D(0/21/0)$ und $S = S(7/14/49)$, sowie eine Ebene $E = E(P,Q,R)$ durch die Punkte $P = P(6/0/6)$, $Q = Q(18/-4/12)$ und $R = R(15/4/7)$.

Die Pyramide wird mit der rechteckigen Grundfläche $ABCD$ so auf die schiefe Ebene E gestellt, dass A auf P und B auf Q zu liegen kommen.

Bestimmen Sie die Koordinaten der Ecken C, D und S für die neue Lage der Pyramide.

Aufgabe 5

In einen liegenden Zylinder (Radius $R = 10\,cm$, Höhe $H = 30\ cm$) werden 5 Liter Wasser geschüttet. Wie hoch steht das Wasser im Zylinder?

a) Formulieren Sie die zu lösende nicht-lineare Gleichung.

Diese Gleichung hat in der Umgebung von 3 eine Lösung. Betrachten Sie daher das Intervall $I = [2.5, 3.5]$.

b) Überprüfen Sie, ob für dieses Intervall die Lipschitzkonstante L des Banach'schen Fixpunktsatzes die Ungleichung $L < 1$ erfüllt.

c) Lösen Sie die Gleichung in **a)** mit dem Verfahren von Steffenson; (Startwert 3, **alle** Zwischenresultate bis und mit zum dritten Wert).

d) Geben Sie die Höhe des Wasserstandes mit zwei Dezimalen nach dem Komma an.

Aufgabe 6

Das skizzierte Parabelsegment schneidet von einer Geraden g mit der Steigung $m_g = 2$ eine Strecke s mit der Länge d heraus.
Bestimmen Sie die Lage der Geraden g so, dass die Länge d maximal wird.
Geben Sie die entsprechende Geradengleichung an und bestimmen Sie die maximale Länge $d_{\max}$.

Parabel (4-ter Ordnung): $y = f(x) = 16 - x^4$
Alle Resultate sind *exakt* anzugeben.