SCHULLEITUNG

**VORDIPLOMPRüFUNG** Abteilung: DAP

Jahr: 2000

Blatt 1 Expertin: R. Schlegel

---

Klasse: DP1a Datum: 11.September 2000

Lehrer: H. Ungricht Zeit: 08.00 - 11.00 h

---

**LöSUNGEN ZUR SCHRIFTLICHEN PRüFUNG IN MATHEMATIK und NUMERIK**

---

**Aufgabe 1**

a) Extrema: lokale Maxima $M_1\left(\frac{2\pi}{9} / \frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(\frac{5\pi}{9} / \frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}\right)$, $M_3\left(\frac{8\pi}{9} / \frac{8\pi}{3}+\sqrt{3}\right)$.
lokale Minima $m_1(0/0)$, $m_2\left(\frac{\pi}{3} / \pi\right) = Knick\ K_1$, $m_3\left(\frac{2\pi}{3} / 2\pi\right) = Knick\ K_2$, $m_4(\pi / 3\pi)$.

b) Zwischenwinkel $\varphi$ in den beiden Knicken $K_1$ und $K_2$: für beide Punkte gilt:
Steigung „links“: $y' = f'(x) = \lim\limits_{x\uparrow\ldots}\left(f'(x)\right) = -3$ und
Steigung „rechts“: $y' = f'(x) = \lim\limits_{x\downarrow\ldots}\left(f'(x)\right) = 9$.
Damit für $\varphi = \arctan\left(\frac{6}{13}\right) = 0.4324$ oder $\varphi = 24.7751°$ im Gradmass.

**Aufgabe 2**

a) $a = -1$ und $b = 1$

b) Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$

Eigenvektoren: $u^{(1)} = \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $u^{(2)} = \mu\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $u^{(3)} = \mu\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\mu \in R$.

Matrix $T = \left(u^{(1)} \quad u^{(2)} \quad u^{(3)}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, z.B. für $\mu = 1$.

---

**Verteiler:**
Spätestens bis Prüfungsbeginn: 1 Exemplar zH. Archiv
je 1 Exemplar zH. des Experten

H/kh/VD.LAS.F/P-53

$$D = T^{-1} \cdot A \cdot T = diag(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $A$ ist invertierbar, falls $\det(A) = (b-1)\cdot(a-b) \neq 0$, d.h. für $b \neq 1$ und $a \neq b$.

**Aufgabe 3**

Schnitt in der Vertikalebene: $y =$ konstant.

Scheitelpunkthöhe: $h(y) = \frac{1}{2}y,\ 0 \le y \le 2$.

$z(x) = \frac{1}{2}y - x^2$, NS: $x_1 = -\sqrt{\frac{y}{2}}$, $x_2 = +\sqrt{\frac{y}{2}}$

Vertikalsegment: $Seg(y) = 2 \cdot \int_0^{x_2} z(x)\,dx = \frac{\sqrt{2}}{3} y^{\frac{3}{2}}$

Volumen: $V = \int_0^2 Seg(y)\,dy = \frac{16}{15}$

**Aufgabe 4**

Normale der Ebene $E$: $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = 14 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{A_{neu}B_{neu}} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \frac{\vec{n} \times \overrightarrow{AB}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} \cdot 21 = \overrightarrow{B_{neu}C_{neu}} = \overrightarrow{A_{neu}D_{neu}}$$

$\overrightarrow{OC_{neu}} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{B_{neu}C_{neu}} = (27 \quad 14 \quad 6)^T$ und somit $C_{neu}(27/14/6)$.

$\overrightarrow{OD_{neu}} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{B_{neu}C_{neu}} = (15 \quad 18 \quad 0)^T$ und somit $D_{neu}(15/18/0)$.

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + 7 \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + 14 \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} + 49 \cdot \frac{\overrightarrow{e_3}}{|\overrightarrow{e_3}|}$ und damit bekommen wir

$\overrightarrow{OS_{neu}} = \overrightarrow{OA_{neu}} + 7 \cdot \frac{\overrightarrow{A_{neu}B_{neu}}}{|\overrightarrow{A_{neu}B_{neu}}|} + 14 \cdot \frac{\overrightarrow{B_{neu}C_{neu}}}{|\overrightarrow{B_{neu}C_{neu}}|} + 49 \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (4 \quad 31 \quad 47)^T$ und somit $S_{neu}(4/31/47)$.

**Aufgabe 5**

a) $0 = \varphi - \sin(\varphi) - k$, wobei $k = 2\pi - \frac{5\ Liter}{\frac{1}{2}R^2 H} = 2.94985197335$

b) $\varphi = \sin(\varphi) + k = F(\varphi)$, somit $L \le \max_{\varphi \in I} |F'(\varphi)| = \max_{\varphi \in I} |\cos(\varphi)| = 1$, da $\pi \in I$.

m.a.W.: $L$ erfüllt $L < 1$ **nicht**.

c) Starwert $\varphi_0 = 3$. Damit bekommen wir mit Steffenson $\varphi^{(0)} = 3.04559902828295$

$\varphi^{(1)} = 3.04564874844530$, $\varphi^{(2)} = 3.04564874850437$ im Bogenmass.

d) $h = R \cdot \left(1 + \cos(\frac{\varphi}{2})\right) = 10.48\,cm$

**Aufgabe 6**

$d$ ist maximal, falls die Tangente an $y = f(x)$ und die Gerade $y = 16 - 8 \cdot x$ parallel sind.

$f'(x) = -4 \cdot x^3 = -8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}$

D.h. $g$ muss durch den Punkt mit den Koordinaten $\left(\sqrt[3]{2}\,/(16 - 2 \cdot \sqrt[3]{3})\right)$ gehen.

Lage von $g$, sodass $d$ maximal wird: $y = 2 \cdot x + \left(16 - 4 \cdot \sqrt[3]{2}\right)$.

$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{5 \cdot (\Delta x)^2}$ und damit $d_{\max} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2}$ .