Zürcher
Hochschule
Winterthur

1. Vordiplomprüfung 2001

Studiengang: ET

Expertinnen/Experten: D. Stoffer

Jahr: 2001

Klasse: ET1b

Datum: 17. September 2001

Dozentin/Dozent: H. Ungricht

Zeit: 08.00-11.00 Uhr

Schriftliche Prüfung in Mathematik

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, Formelsammlung, selbstverfasste Zusammenfassung

Darstellung:

- Beschreiben Sie die Blätter nur einseitig.
- Beginnen Sie jede neue Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Dokumentieren Sie sämtliche Lösungen:
  Lösungsweg, Zwischenergebnisse und verwendete Rechnerprogramme sind anzugeben.

Bewertung: Alle Aufgaben werden gleich gewichtet. Für 5 oder mehr richtig gelöste Aufgaben wird die Note 6 erteilt.

Aufgabe 1

Gegeben ist ein Parabelbogen $y = f(x) = 1 - x^2$ für $x \in [-1, 1]$.
Dem Parabelbogen ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC so zu umschreiben, dass seine Fläche minimal wird. Wie gross ist diese minimale Fläche? Resultat *exakt*.

Verteiler:

Kandidatinnen/Kandidaten: nach Prüfung an Dozierende zurück

Spätestens bis Prüfungsbeginn: 1 Exemplar (ohne Beilagen) zH. Schulsekretariat
1 Exemplar zH. der beteiligten Expertinnen/Experten

Aufgabe 2

Für welche Parameter $\alpha, \beta \in R$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x & & +4\cdot z & -3\cdot w & = & 2 \\ & y & +2\cdot z & +w & = & 1 \\ 2\cdot x & & +8\cdot z & \alpha\cdot w & = & \beta \\ -x & +2\cdot y & +z & +4\cdot w & = & 3 \end{cases}$$

a) genau eine Lösung?

b) unendlich viele Lösungen? Wie viele freie Parameter sind möglich? Geben Sie den entsprechenden Rang des Gleichungssystem an.

c) keine Lösung?

d) Bestimmen Sie für den Fall b) eine Parameterdarstellung der Lösungen.

Aufgabe 3

Eine Parabel hat ihren Scheitel in $S(-2/3)$ und geht durch den Punkt $A(2/-13)$.

Die Parabel soll so verschoben werden, dass sie die Kurve der Funktion $y = f(x) = (x-5)^4$ an der Stelle $x = 6$ berührt. Geben Sie die Gleichung der verschobenen Parabel an.

Aufgabe 4

Von einem Quader ist die Kante AB gegeben, während man von den anderen von A ausgehenden Kanten AD bzw. AE weiss, dass D auf der Geraden g und E in der Ebene Σ liegt.
Dabei sind $A(-2/-4/-4)$, $B(2/4/4)$.
Die Gerade g geht durch die beiden Punkte $P(4/2/-2)$ und $Q(5/4/1)$.
Die Ebene Σ ist mit $x + y - z + 5 = 0$ gegeben.
Bestimmen Sie das Volumen dieses Quaders.

Aufgabe 5

In der $xy-$ Ebene ist die Parabel mit der Gleichung $y^2 = 16 - 4\cdot x$ und in der $xz-$ Ebene ein Viertelskreis mit Zentrum $M(0/0/0)$ gegeben. Der Kreis geht durch den Scheitelpunkt der Parabel. Die Querschnittsfläche an der Stelle $x = x_0$ parallel zur $yz-$Ebene ist jeweils ein gleichschenkliges Dreieck. Berechnen Sie das Volumen des skizzierten Körpers. Resultat *exakt*.

Aufgabe 6

Gegeben ist die folgende symmetrische $3 \times 3 -$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad a \in R$$

a) Wie gross muss a sein, damit das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ von A in der Form

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot \{(2 - \lambda) \cdot (\lambda - 3) + 2\}$$

geschrieben werden kann.

b) Lösen Sie für den in a) gefundenen Wert von a das Eigenwertproblem von A.

c) Orthonormieren Sie die in b) bestimmte Eigenbasis von A.