1. Vordiplomprüfung 2002

Zürcher Hochschule Winterthur

Mitglied
der Zürcher
Fachhochschul

Studiengang:	DP	Expertinnen/Experten:	C. Wissler
Jahr:	2002		

Klasse:	DP1a	Datum:	02.09.02
Dozentin/Dozent:	Ungricht / Weber	Zeit:	08.00-11.00

Lösungen zur schriftlichen Prüfung in Mathematik und Numerischer Mathematik

Verteiler:

Spätestens eine Woche vor Prüfungsdatum: 1 Exemplar zH. der beteiligten Expertinnen/Experten
1 Exemplar zH. Schulsekretariat

Aufgabe 1

Die Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Als Eigenwerte erhält man

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{5} \quad und \qquad \lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$$

und die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$F_1 = (1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \quad bzw. \quad F_2 = (1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$$

Die Transformationsmatrix wird damit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Normalform von A ist

$$N = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

und die zugehörige Exponentialmatrix ist

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{(2+\sqrt{5})t} & 0 \\ 0 & e^{(2-\sqrt{5})t} \end{pmatrix}$$

Die Rücktransformation ergibt

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{(2+\sqrt{5})t}\,\frac{5-\sqrt{5}}{10} + e^{(2-\sqrt{5})t}\,\frac{5+\sqrt{5}}{10} & e^{(2+\sqrt{5})t}\,\frac{\sqrt{5}}{5} - e^{(2-\sqrt{5})t}\,\frac{\sqrt{5}}{5} \\ e^{(2+\sqrt{5})t}\,\frac{\sqrt{5}}{5} - e^{(2-\sqrt{5})t}\,\frac{\sqrt{5}}{5} & e^{(2+\sqrt{5})t}\,\frac{5+\sqrt{5}}{10} + e^{(2-\sqrt{5})t}\,\frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$$

b) Als Lösung ergibt sich unmittelbar

$$(x(t), y(t)) = e^{At}(1,1)$$

Aufgabe 2.

Der Ansatz ist aufgrund der Symmetrie f(x) = -a(x^2-b^2) wobei a > 0. f(2) = 3 impliziert

$$a = \frac{3}{b^2 - 4}$$

und damit

$$f(x) = 3\frac{b^2 - x^2}{b^2 - 4}$$

Integration ergibt für die Fläche zwischen –b und b

$$A = \frac{4b^3}{b^2 - 4}$$

Aus der Extremalbedingung resultiert die Gleichung

$$4\frac{b^2(b^2 - 12)}{(b^2 - 4)^2} = 0$$

Daraus erhält man $b = 2\sqrt{3} \quad und \quad a = \frac{3}{8}$

Aufgabe 3.

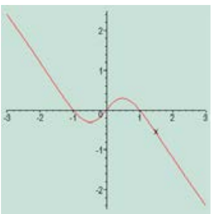
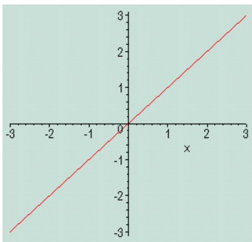
Die erzeugende Funktion des Systems ist

$$f(x,r) = x - \frac{rx^3}{1 + x^2}$$

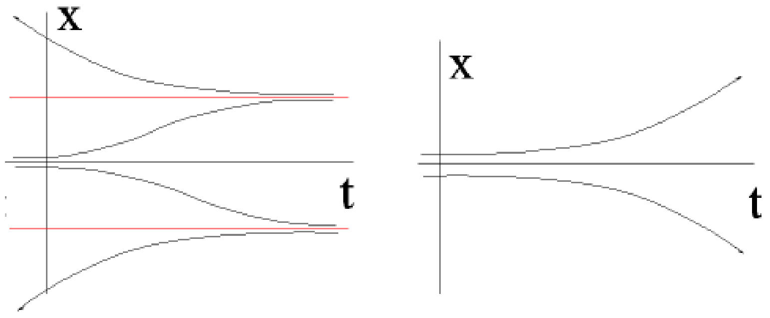
Als Singularitäten des Systems erhält man damit

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{\sqrt{r-1}}, x_3 = \frac{1}{\sqrt{r-1}}$$

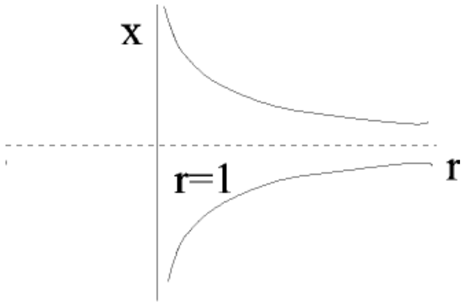
Der kritische Punkt ist demnach r = 1. Typische Beispiele sind

r = 2:  r = 0: 

Für sie ergeben sich die Lösungsbilder



Das Bifurkationsdiagramm hat die Gestalt



Aufgabe 4.

Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind

$R_1 = (-1,0,1)$ und $R_2 = (1,1,-1)$.

Das Vektorprodukt ergibt die Richtung der Minimaltransversalen. Man erhält N = (-1,0,-1)

Für den Schnittpunkt mit g ergibt sich (-1/2,0,3/2), Schnittpunkt mit h ist (-1,0,1).

Aufgabe 5

$\alpha = 3$ vorzeitiger Abbruch nach einem Schritt.
oder
$\alpha \neq 3$ und $\alpha = 1/2$ vorzeitiger Abbruch nach zwei Schritten.
Keine Lösung, falls $\alpha = 3$ und $\beta \neq 1$
Oder
$\alpha \neq 3$ und $\alpha = 1/2$ und $\beta \neq 1/2$
je eine Verträglichkeitsbedingung nicht erfüllt

genau eine Lösung, falls $\alpha \neq 3$ und $\alpha \neq 1/2$.
∞ – viele Lösungen mit einem freien Parameter, Rang $r = 2$, falls
$\alpha = 3$ und $\beta = 1$, $x_2 =$ freier Parameter

Lösung: $x = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 0 \\ 1/5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$

Oder

$\alpha \neq 3$ und $\alpha = \beta = 1/2$, $x_3 =$ freier Parameter

Lösung: $x = \begin{pmatrix} -1/10 \\ -1/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$

Aufgabe 6

$f'(x) = \frac{-x^2 - 2}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad f'''(x) = -\frac{12}{x^4} \quad f^{(4)}(x) = \frac{48}{x^5}$

$M_{Trapez} = 4 \qquad M_{Simpson} = 48$

absoluter Fehler für die Trapezmethode: $F \leq \frac{(b-a)}{12} \cdot h^2 \cdot M_{Trapez}$

absoluter Fehler für die Methode von Simpson: $F \leq \frac{(b-a)}{180} \cdot h^4 \cdot M_{Simpson}$

a)

$$\begin{aligned} T_0 &= 0.208\overline{3} \\ T_2 &= 0.191\overline{6} \\ T_4 &= 0.187\overline{37} \\ T_8 &= 0.18629170238 \end{aligned}$$

$I_{exakt} = 2 \cdot \ln(3/2) - 5/8 \cong 0.18593021622$

b) maximal mögliche Fehler: 0.0417 0.0104 0.0026 0.0007, nämlich

$h_0 = 0.5 \qquad 4/12 \cdot 0.5 \cdot (0.5)^2 = 1/24$

$h_1 = 0.25 \qquad 4/12 \cdot 0.5 \cdot (0.25)^2 = 1/96$

$h_2 = 0.125 \qquad 4/12 \cdot 0.5 \cdot (0.125)^2 = 1/384$

$h_3 = 0.0625 \qquad 4/12 \cdot 0.5 \cdot (0.0625)^2 = 1/1536$

tatsächliche Fehler: 0.0224 0.0057 0.0014 0.0004

c) maximal möglicher Fehler für die Methode von Simpson: $\frac{0.5}{180} \cdot \frac{1}{16^4} \cdot 48 = 2.0345\text{e-}006$