Lösungen der Aufgaben (1-tes VD 2002, DP1a):

Aufgabe 5

$\alpha = 3$ vorzeitiger Abbruch nach einem Schritt.
oder
$\alpha \neq 3$ und $\alpha = \frac{1}{2}$ vorzeitiger Abbruch nach zwei Schritten.

Keine Lösung, falls $\alpha = 3$ und $\beta \neq 1$
Oder
$\alpha \neq 3$ und $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta \neq \frac{1}{2}$
je eine Verträglichkeitsbedingung nicht erfüllt

genau eine Lösung, falls $\alpha \neq 3$ und $\alpha \neq \frac{1}{2}$.

∞ – viele Lösungen mit einem freien Parameter, Rang $r = 2$, falls

$\alpha = 3$ und $\beta = 1$, $x_2 =$ freier Parameter

Lösung: $x = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$

Oder

$\alpha \neq 3$ und $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $x_3 =$ freier Parameter

Lösung: $x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$

Aufgabe 6

$$f'(x)=\frac{x-4}{x^3}\qquad f''(x)=\frac{-2\cdot(x-6)}{x^4}\qquad f'''(x)=\frac{-6\cdot(x-8)}{x^5}\qquad f^{(4)}(x)=\frac{-24\cdot(x-10)}{x^6}$$

$M_{Trapez}=10\qquad M_{Simpson}=216$

absoluter Fehler für die Trapezmethode: $F\le\frac{(b-a)}{12}\cdot h^2\cdot M_{Trapez}$

absoluter Fehler für die Methode von Simpson: $F\le\frac{(b-a)}{180}\cdot h^4\cdot M_{Simpson}$

a)

$T_0 = .3055555555$

$T_2 = .2727777778$

$T_4 = .2641309560$

$T_8 = .2619362157$

$I_{exakt}=\frac{2}{3}-\ln(3)+\ln(2)\cong .261201559$

b) Die maximal möglichen Fehler der Trapezwerte sind:

$h_0=0.5$	$\frac{10}{12}\cdot 0.5\cdot(0.5)^2$	$=.1041666667$
$h_1=0.25$	$\frac{10}{12}\cdot 0.5\cdot(0.25)^2$	$=.2604166667e\text{-}1$
$h_2=0.125$	$\frac{10}{12}\cdot 0.5\cdot(0.125)^2$	$=.6510416667e\text{-}2$
$h_3=0.0625$	$\frac{10}{12}\cdot 0.5\cdot(0.0625)^2$	$=.1627604167e\text{-}2$

Die tatsächlichen Fehler der Trapezwerte sind:

T_0: .443539965e-1

T_2: .115762188e-1

T_4: .29293970e-2

T_8: .7346567e-3

c) maximal möglicher Fehler für die Methode von Simpson:

$\frac{0.5}{180}\cdot\frac{1}{16^4}\cdot 216=.9155273433e\text{-}5$