Lösungen:

Aufgabe 3

a) $x_1 = y$ und $x_2 = \dot{y}$. Mit dieser Substitution erhalten wir: $\dot{x} = A\,x$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

und $x \in \mathbb{R}^2$ mit den AB $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Exakte Lösung: $x(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$, $0 \le t$

c) $h = 0.2$

$$x(h) = (I_2 - \tfrac{h}{2} A)^{-1} (I_2 + \tfrac{h}{2} A)\, x(0) = \frac{1}{1 - \frac{h^2}{4}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{h^2}{4} & h \\ h & 1 + \frac{h^2}{4} \end{pmatrix} x(0) = \begin{pmatrix} 1.02020202... \\ 0.2020202... \end{pmatrix}$$

d) $h = 0.1$ $\qquad x(h) = (I_2 + h\,A + \frac{h^2}{2} A^2)\, x(0) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{h^2}{2} & h \\ h & 1 + \frac{h^2}{2} \end{pmatrix} x(0)$,

$$x(2h) = (I_2 + h\,A + \tfrac{h^2}{2} A^2)\, x(h) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{h^2}{2} & h \\ h & 1 + \frac{h^2}{2} \end{pmatrix} x(h) = \begin{pmatrix} (1 + \frac{h^2}{2})^2 + h^2 \\ 2h(1 + \frac{h^2}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.020025 \\ 0.201000 \end{pmatrix}$$

e) $h = 0.2$: exakte Lösung: $x(0.2) = \begin{pmatrix} 1.020066755619076 \\ 0.2013360025410940 \end{pmatrix}$

absolute Fehler: absHeun = 3.385871222389890e-004
absTrapez = 6.974420654153497e-004

relative Fehler: relHeun = 3.256439784347860e-004
relTrapez = 6.707810013793715e-004

Bem: Sowohl die absoluten als auch die relativen Fehler sind bei der Methode von Heun nur halb so gross, die Zehnerpotenzen stimmen überein.