Zürcher
Hochschule
Winterthur

Mitglied
der Zürcher
Fachhochschul

2. Vordiplomprüfung 2002

ɔ

Studiengang:	DP	Expertinnen/Experten:	C. Glaus
Jahr:	2002		

Klasse:	DP2a	Datum:	03.09.02
Dozentin/Dozent:	Manz, Ungricht / Heitz, Weber	Zeit:	13.00 - 16.00

Schriftliche Prüfung Mathematik (MG) und Dynamische Systeme und Prozesse (DSP)

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, Formelsammlung, selbstverfasste Zusammenfassung

Darstellung:

i. Beschreiben Sie die Blätter nur einseitig.
ii. Beginnen Sie jede neue Aufgabe auf einem separaten Blatt.
iii. Dokumentieren Sie sämtliche Lösungen:
Lösungsweg, Zwischenresultate und verwendete Rechnerprogramme sind anzugeben.

Bewertung: Alle Aufgaben werden gleich gewichtet. Für 5 oder mehr richtig gelöste Aufgaben wird die Note 6 erteilt.

Verteiler:

Kandidatinnen/Kandidaten:	Die Aufgabenstellung muss mit den Lösungsblättern nach der Prüfung den Dozierenden abgegeben werden.
spätestens eine Woche vor Prüfungsbeginn:	Exemplar (ohne Beilagen) zH. Schulsekretariat je 1 Exemplar zH. der beteiligten Expertinnen/Experten

Aufgabe 1

Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten der periodischen Funktion $f(x) = |\cos(3x)|$.
Wie lautet die Fourier-Entwicklung bis zum vierten Glied in reeller Schreibweise?

Aufgabe 2

Gegeben sie die Funktion $f(x, y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$.

a) Berechnen Sie die lokalen Extreme dieser Funktion.

b) Welche Extremwerte hat die gegebene Funktion auf dem Einheitskreis?
(Tipp: entweder Kreis parametrisieren oder Lagrange-Multiplikator)

Aufgabe 3

Betrachten Sie das AWP $\ddot{y} - y = 0$ mit $y(0) = 1$ und $\dot{y}(0) = 0$.

a) Schreiben Sie das gegebene AWP als System von Dgl. 1-ter Ordnung.
b) Bestimmen Sie die exakte Lösung.
c) Trapezmethode mit $h = 0.2$, ein Schritt von Hand.
d) Methode von Heun bis zur Zeit $t = 0.2$ (2 Schritte mit $h = 0.1$).
e) Vergleichen Sie die approximativen Werte mit den exakten Werten bei $t = 0.2$.
Geben Sie für beide Verfahren sowohl den absoluten als auch den relativen Fehler an (Verwenden Sie dabei die gewöhnliche Euklid'sche Vektornorm)

Aufgabe 4

Man untersuche die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung.

$$x''(t) = -fx(t) + x(t)^3$$

a) Man bestimme das äquivalente ebene dynamische System.
b) Man bestimme dessen Gleichgewichtslagen in Abhängigkeit von f. Bei welchem Wert von f ändert das System sein Verhalten?
c) Man ermittle das Potential und skizziere mit dessen Hilfe für je einen typischen Wert von f aus den beiden Verhaltensbereichen die Trajektorien.
d) Man stelle den Energieerhaltungssatz auf und ermittle die Gleichung der Trajektorien.

Aufgabe 5

Man untersuche das nichtlineare System

$$x'(t) = 2x(t)y(t) \qquad\qquad y'(t) = 1 + x(t)^2 - y(t)^2$$

a) Man ermittle die Koordinaten der Singularitäten und bestimme mittels der Linearisierung den Typ und das Stabilitätsverhalten.
b) Man zeige qualitativ, dass es Lösungen $(x(t), y(t))$ mit $x(t) = 0$ gibt. Mit anderen Worten setzt sich die y-Achse des Phasenraumes aus Trajektorien zusammen.
c) Man zeige, dass für jede Lösung $(x = u(t), y = v(t))$ auch $(x = -u(t), y = v(t))$ eine solche ist.
d) Man skizziere nun mit Hilfe von a) – c) das globale Trajektorienbild.

Aufgabe 6

a) Eine Grundwasserpumpe entfernt einsickerndes Grundwasser in den Fundamenten eines grossen Gebäudes. Wenn die Pumpe stehenbleibt, sammelt sich das Wasser an. Bei längerem Stillstand tritt ein Gebäudeschaden auf. Ab und zu treten Störungen an der Pumpe auf. Dann muss ein Service-Mitarbeiter der Pumpenfirma eine Reparatur durchführen. Aus Untersuchungen weiss man, dass die Laufzeit der Pumpe zwischen zwei Störungen exponentialverteilt ist. Der Mittelwert der Laufzeit beträgt 200 Tage.
Die Reparatur selber dauert im Mittel 72 Stunden. Nehmen Sie an, dass die Reparaturzeit exponentialverteilt ist.
Die Reparatur kostet unabhängig von ihrer Dauer 2000 Fr.

(i) Modellieren Sie den Prozess als Markov-Prozess. Geben Sie den Zustandsraum an und zeichnen Sie das Zustandsraumdiagramm.
(ii) Welchen Anteil der Zeit ist die Pumpe ausser Betrieb?
(iii) Im Betrieb verursacht die Pumpe laufende Kosten (Stromkosten) von 50 Rp. Pro Stunde. Wie hoch sind die Gesamtkosten der Pumpanlage (Strom plus Reparaturkosten) pro Jahr?
(iv) Wenn die Pumpe länger als 11 Tage ausser Betrieb ist, tritt ein Gebäudeschaden auf. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Pumpenausfall ein solcher Gebäudeschaden auftritt?
(v) Das Management rechnet mit Kosten von etwa 100'000 Fr., die bei einem Gebäudeschaden fällig werden. Berechnen Sie den Erwartungswert der Kosten eines Ausfalls unter zusätzlicher Berücksichtigung der Kosten der Gebäudeschäden.
(vi) Wie hoch sind die erwarteten Kosten pro Jahr, wenn Sie zusätzlich zu den Strom- und Reparaturkosten noch die Folgenkosten bei zu langem Ausfall (Gebäudeschäden) berücksichtigen?

b) Ein Fertigungsroboter bearbeitet Rohteile in einem festgelegten Fertigungsrhythmus. Bei normalem Betrieb bearbeitet der Roboter ein Teil pro Minute. Er ist 7 Tage pro Woche 24 Stunden pro Tag in Betrieb. Ab und zu treten Störungen im Betrieb des Roboters auf die dazu führen, dass das Teil innerhalb der vorgegebenen Zeit von 1 Minute nicht fertig bearbeitet werden kann. Die Wahrscheinlichkeit für eine Störung in der Periode $(i+1)$ ist 0.01, wenn der Roboter in der Periode i normal gearbeitet hat.
Wenn eine Störung auftritt, startet der Roboter eine automatisches Diagnoseprogramm. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% kann das Diagnoseprogramm den Fehler beheben. Das zu bearbeitende Teil wird dann in der nächsten Periode fertigbearbeitet. Wenn das Diagnoseprogramm nicht erfolgreich ist, wird ein Alarm ausgelöst und ein Monteur versucht das Problem zu lösen. Nehmen Sie an, dass ein Monteur immer genau zwei Bearbeitungsperioden braucht, um die Störung zu beheben. Damit sind drei unproduktive Perioden vergangen, ehe der Roboter die Arbeit wieder aufnimmt (1 Periode in der die Störung auftritt und zwei Perioden der Reparatur). In der vierten Periode wird das Teil dann fertigbearbeitet.

i. Modellieren Sie den Prozess als Markovprozess. Definieren Sie den Zustandsraum und zeichnen Sie das Zustandsraumdiagramm.
ii. Nehmen Sie nun an, dass der Monteur eine Wahrscheinlichkeit von 80% hat, die Störung innerhalb der ersten Minute zu beheben, und eine Wahrscheinlichkeit von 10%, sie innerhalb der zweiten Minute zu beheben. Im Rest der Fälle kann er die Störung innerhalb der dritten Minute beheben. Modellieren Sie den Prozess als Markovprozess. Definieren Sie den Zustandsraum und zeichnen Sie das Zustandsraumdiagramm.