Klasse MI1a VD Aufgaben 2002

Kurz-Aufgaben, (**ohne** Hilfsmittel)

Aufgabe 1

Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & -4 & 9 & 5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$m = ?$, $n = ?$, Anzahl freie Parameter, Wie gross ist der Rang $r =$

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$. Wie gross muss $d = ?$ sein, damit $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$.
Lösen Sie das EWP von A und diagonalisieren Sie anschliessend A

Aufgabe **mit** Hilfsmitteln:

Gegeben sei die Matrix: $C = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & b \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie $a, b \in R$ so, dass für das charakteristische Polynom $p_C(\lambda)$ der Matrix C gilt:
$p_C(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda$

$a, b \in R$

b) Bestimmen Sie für diese Werte $a, b \in R$ aus a) eine $3 \times 3-$Matrix T, so dass $T^{-1}CT$ diagonal wird.

c) Verwenden Sie die Darstellung von C aus b) zur Berechnung von C^k, $k = 1, 2, 3, \cdots$

Lösungen

Kurz-Aufgaben, **ohne** Hilfsmittel

Aufgabe 1

$m=3$ und $n=5$, vorzeitiger Abbruch nach zwei Schritten, also Rang $r=2$.
x_3, x_4, x_5 sind freie Parameter, wobei $x_{k+2}=\mu_k$, $k=1,2,3$.

Lösungen: $x=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\mu_1\begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu_3\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\qquad \mu_1,\mu_2,\mu_3\in\mathbb{R}$

Aufgabe 2

$d=2$, Eigenvektoren: zu $\lambda_1=1$: $v_1=\mu_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $\mu_1\in\mathbb{R}$ und zu $\lambda_2=3$: $v_2=\mu_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\mu_2\in\mathbb{R}$

Diagonalisierung von A: $T=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$ und somit $T^{-1}AT=D=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$

Aufgabe **mit** Hilfsmitteln:

a) $a=0$ und $b=2$ und somit $C=\begin{pmatrix}0&1&-2\\0&-1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}$

b) EWP von C: Eigenwerte $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$

Eigenvektoren: zu $\lambda_1=0$ $v_1=\mu_1\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, zu $\lambda_2=1$ $v_2=\mu_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, zu $\lambda_3=-1$ $v_3=\mu_3\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

c) Und daraus $T=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ und $T^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$ und damit

$T^{-1}CT=D=diag(0,1,-1)$ und schliesslich $C^k=T\,D^k\,T^{-1}$, $k=1,2,\ldots$

$C^k=\begin{pmatrix}1+(-1)^k&1&-1+(-1)^k\\-1-(-1)^k&-1&1-(-1)^k\\-1&-1&1\end{pmatrix}$ und somit:

$k =$ gerade: $C^k = C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und für $k =$ ungerade: $C^k = C$